82e Année (1971-1972) Août-Septembre 1971 N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1971

N.D.L.R. — Pour permettre à ce numéro de la Revue de présenter un éventail des concours aussi large que possible, nous avons dû renoncer à faire paraître le sujet de certaines épreuves. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales.

5951. L'objet du problème est l'étude de certains sous-groupes du groupe PGL(2, **C**) des homographies du *plan projectif* $P_2(\mathbf{C})$ sur le corps **C** des nombres complexes. Pour toute partie E de $P_2(\mathbf{C})$, on notera $\mathcal{H}(E)$ le sous-groupe de PGL(2, **C**) formé des homographies h laissant E globalement invariante, c'est-à-dire telles que l'on ait $h(E) = E$. Dans certaines questions, on utilisera la *droite projective complexe* $P_1(\mathbf{C})$.

Rappels. — Une n-forme en trois indéterminées X, Y, T est un polynôme homogène F de $\mathbf{C}[X, Y, T]$ de degré n supérieur ou égal à 1. Un repère projectif de $P_2(\mathbf{C})$ étant choisi, l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des points M de $P_2(\mathbf{C})$ dont les coordonnées X, Y et T vérifient $F(X, Y, T) = 0$, est la *courbe algébrique attachée à* F; les éléments de $\mathcal{C}(F)$ sont les *points* de la forme; ainsi à une 1-forme est attachée une *droite*, à une 2-forme une *conique propre* ou la *réunion de deux droites*... Les courbes attachées à deux 2-formes F_1 et F_2 sont égales si, et seulement si, F_1 et F_2 sont proportionnelles.

Soit $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ un point de $\mathcal{C}(F)$ et $M_1(X_1, Y_1, T_1)$ un point de $P_2(\mathbf{C})$ $(M_1 \neq M_0)$; en M_0 la droite de représentation $M = M_0 + \rho M_1$ rencontre $\mathcal{C}(F)$ à l'ordre k (ou k fois) pour la forme F, si la valuation du polynôme $F(X_0 + \rho X_1, Y_0 + \rho Y_1, T_0 + \rho T_1)$ par rapport à ρ est égale à k (par convention la valuation du polynôme nul est $+\infty$). La droite $M = M_0 + \rho M_1$ est *tangente en* M_0 à $\mathcal{C}(F)$ si k est supérieur ou égal à 2 et s'il existe une droite rencontrant en M_0 la courbe $\mathcal{C}(F)$ à un ordre $l \leqslant k - 1$ $(1 \leqslant l < +\infty)$. *L'ordre* du point M_0 pour la forme F est le minimum de cette valuation quand M_1 varie; M_0 est *singulier* si son ordre est supérieur ou égal à 2 [pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $F'_X(M_0) = F'_Y(M_0) = F'_T(M_0) = 0$]. Dans le cas contraire M_0 est *simple*.

Enfin on admettra que, si les deux n-formes F_1 et F_2 sont *irréductibles*, la relation $\mathcal{C}(F_1) = \mathcal{C}(F_2)$ équivaut à l'existence d'un complexe, t, non nul tel que l'on ait $F_1 = tF_2$. Il s'ensuit que, pour toute courbe algébrique $\Gamma = \mathcal{C}(F)$ attachée à une forme irréductible F et pour toute homographie $h \in$ PGL(2, **C**), on a $h(\Gamma) = \Gamma$ si, et seulement si, il existe un complexe t non nul tel que l'on ait $F(X', Y', T') = tF(X, Y, T)$, où X, Y et T désignent les coordonnées d'un point M quelconque de $P_2(\mathbf{C})$ et X′, Y′ et T′ celles de $M' = h(M)$.

I. — On appelle *triangle* un ensemble de trois points non alignés de $P_2(\mathbf{C})$, et *côtés* de ce triangle les trois droites joignant deux à deux les trois points. On appelle *quadrangle* un ensemble de quatre points de $P_2(\mathbf{C})$ dont trois quelconques ne sont pas alignés, et *côtés* de ce quadrangle les six droites joignant deux à deux les quatre points;

ces côtés se coupent deux à deux en sept points dont trois n'appartiennent pas au quadrangle et forment son *triangle diagonal.*

Dans toute la partie I, on désigne par Q un quadrangle ABCD donné.

On conviendra de réserver l'appellation *conique* aux coniques *propres* et aux réunions de deux droites distinctes.

1° Montrer que le groupe $\mathcal{H}(Q)$ est isomorphe au groupe des permutations de Q. Dans la suite, on notera $\mathcal{A}(Q)$ le sous-groupe de $\mathcal{H}(Q)$ formé des homographies correspondant aux permutations paires de Q.

2° Dans $P_2(\mathbf{C})$ on choisit le repère $\mathcal{R}$ tel que Q soit l'ensemble des points $A\ (1, 1, 1)$, $B\ (-1, 1, 1)$, $C\ (-1, -1, 1)$ et $D\ (1, -1, 1)$. On désigne par Φ le faisceau linéaire ponctuel des coniques attachées aux formes $\lambda_1(X^2 - T^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2)$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes non simultanément nuls.

a) Démontrer que l'on peut définir une bijection θ de Φ sur $P_1(\mathbf{C})$ telle que la conique d'équation

$$\lambda_1(X^2 - T^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2) = 0$$

corresponde, dans un repère convenable de $P_1(\mathbf{C})$, au point de coordonnées homogènes (λ_1, λ_2). Dans la suite, on identifie Φ et $P_1(\mathbf{C})$ à l'aide de θ.

b) Pour toute conique, K, de Φ et pour toute homographie, h, de $\mathcal{H}(Q)$, la transformée $h(K)$ est une conique de Φ. Démontrer que, pour h fixée, l'application $\tilde{h}$: $K \longmapsto h(K)$ est une homographie de $P_1(\mathbf{C})$.

L'application $h \longmapsto \tilde{h}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}(Q)$ dans le groupe $PGL(1, \mathbf{C})$ des homographies de $P_1(\mathbf{C})$; en déterminer avec précision l'image, I_Q, et le noyau [en appelant abscisse projective de $N(\lambda_1, \lambda_2)$ le birapport $\rho = (\lambda_1, \lambda_2, 0, \infty)$, on pourra définir toute homographie de $P_1(\mathbf{C})$ en exprimant en fonction de ρ l'abscisse projective ρ' de l'image N' de N].

c) Quels sont les points doubles des homographies éléments de I_Q? Montrer que les orbites des éléments de Φ sous $\mathcal{H}(Q)$ ont en général six éléments, que deux d'entre elles ont trois éléments et que l'une d'entre elles a deux éléments. Représenter sur une même figure les orbites à trois éléments.

3° *a*) Démontrer que $\mathcal{H}(Q)$ est engendré par les homographies, σ et τ, correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$. Représenter σ et τ par des matrices, relativement au repère $\mathcal{R}$.

Démontrer que $\mathcal{A}(Q)$ est engendré par les homographies, φ et ψ, correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$. Représenter φ et ψ par des matrices, relativement à $\mathcal{R}$.

b) Montrer qu'il existe dans $P_2(\mathbf{C})$ une conique et une seule, $K(Q)$, laissée globalement invariante par toute homographie de $\mathcal{H}(Q)$. Quelles sont les polaires de A, B, C et D par rapport à $K(Q)$?

c) On se donne un ensemble, Q^*, de quatre droites de $P_2(\mathbf{C})$, dont trois quelconques ne sont pas concourantes. Déterminer le groupe des homographies qui laissent Q^* globalement invariant.

4° Le repère étant toujours $\mathcal{R}$, on s'intéresse ici à des courbes algébriques soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{H}(Q)$ [en abrégé par $\mathcal{H}(Q)$], soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{A}(Q)$ [par $\mathcal{A}(Q)$].

a) Établir qu'une courbe attachée à une 4-forme $H(X, Y, T)$ est invariante par $\mathcal{H}(Q)$ si, et seulement si, on a

$$H(X, Y, T) = S(X^2, Y^2, T^2), \text{ où } S \text{ est une 2-forme symétrique.}$$

b) Trouver les 4-formes dont les courbes attachées sont invariantes par $\mathcal{A}(Q)$.

II. — On conserve toutes les notations précédentes; $P_2(\mathbf{C})$ est rapporté à $\mathcal{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on désigne par F_λ la 4-forme suivante :

$$X^4 + Y^4 + T^4 + 2\lambda(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2)$$

et par (C_λ) la courbe algébrique $\mathcal{C}(F_\lambda)$. On note F_∞ la forme

$$Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2$$

et (C_∞) la courbe $\mathcal{C}(F_\infty)$; F_∞ *et* (C_∞) *n'interviennent que dans les questions* 1°, *a et* 6°. Une 4-forme F_λ (ou F_∞) et une droite (L) étant données, on dit que (L) est *tangente double* à la courbe (C_λ) attachée [ou (C_∞)] si (L) la rencontre soit aux ordres 2 et 2 en deux points simples distincts, soit à l'ordre 4 en un point simple. Une telle tangente double est dite *ordinaire* dans le premier cas, *stationnaire* dans le deuxième. On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes doubles à certaines courbes (C_λ).

1° *a*) Établir que F_∞ est irréductible et préciser ses points singuliers. Trouver une représentation paramétrique rationnelle propre de (C_∞).

b) Vérifier que (C_{-1}) est la réunion de quatre droites. Pour quelles autres valeurs complexes λ la forme F_λ a-t-elle des points singuliers? Démontrer que pour ces valeurs F_λ n'est pas irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y, T]$. Préciser

les courbes (C_λ) correspondantes. On note Λ l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles F_λ est irréductible; *dans la suite, sauf au 6°, on impose à* λ *d'appartenir à* Λ.

c) Établir que, pour $\lambda \in \Lambda$, les courbes (C_λ) admettent comme tangentes doubles fixes ordinaires les quatre droites de (C_{-1}) et que les points de contact ne dépendent pas de λ.

2° Déterminer les tangentes doubles à (C_λ) qui passent par les trois points suivants:

(1) $(0, 0, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(1, 0, 0)$.

Sont-elles ordinaires ou stationnaires?

3° On désigne par g l'application de $P_2(\mathbf{C})$ dans lui-même qui, à tout point $M(X, Y, T)$, fait correspondre le point $g(M)$ de coordonnées (X^2, Y^2, T^2).

a) Démontrer que, si (Γ) est une courbe algébrique, $g^{-1}(\Gamma)$ est une courbe algébrique. Quelle est l'image par g d'une courbe (C_λ)?

b) On désigne par $\mathcal{T}$ la famille des coniques propres de $P_2(\mathbf{C})$ tangentes aux trois droites d'équations $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$. Démontrer que, si (L) est une droite de $P_2(\mathbf{C})$, g applique en général (L) sur une conique de la famille $\mathcal{T}$. Quels sont les cas d'exception? Quelle est l'image réciproque $g^{-1}[g(L)]$?

c) Soit $F(X, Y, T)$ et $G(X, Y, T)$ deux formes de degrés quelconques, (Γ) et (Δ) les courbes attachées à ces formes. On désigne par (Γ') et (Δ') les courbes attachées aux formes $F(X^2, Y^2, T^2)$ et $G(X^2, Y^2, T^2)$, par $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ un point de $(\Gamma') \cap (\Delta')$ et par N_0 le point $g(M_0)$; on suppose que M_0 n'appartient à aucune des trois droites $X = 0, Y = 0, T = 0$. Démontrer que (Γ') et (Δ') ont en M_0 une tangente commune au moins si, et seulement si, (Γ) et (Δ) ont en N_0 une tangente commune, au moins. (On pourra traiter d'abord le cas $X_0 = Y_0 = T_0$.)

4° *a)* On considère une tangente double (L) à (C_λ) ne passant par aucun des trois points définis au paragraphe II, 2° par (1). Démontrer que la conique propre $g(L)$ est soit bitangente soit surosculatrice à la conique (Γ_λ) attachée à la forme $X^2 + Y^2 + T^2 + 2\lambda(YT + TX + XY)$. Quelles sont les images par g des tangentes doubles trouvées au paragraphe II, 2°?

b) Trouver, λ étant fixé dans Λ, les coniques de la famille $\mathcal{T}$ qui sont bitangentes ou surosculatrices à (Γ_λ). On pourra utiliser la propriété suivante: *deux coniques propres, définies en coordonnées ponctuelles ou tangentielles par des matrices symétriques* U *et* V, *relatives à un repère projectif donné, sont bitangentes ou surosculatrices si, et seulement si, il existe des complexes* ξ *et* η *tels que la matrice* $\xi U + \eta V$ *soit de rang* 1.

c) Déduire de ce qui précède que les tangentes doubles à (C_λ) autres que celles déjà trouvées au paragraphe II, 1° et au paragraphe II, 2°, sont les douze droites dont les équations $\alpha X + \beta Y + \gamma T = 0$ ont leurs coefficients α, β et γ assujettis à vérifier l'un des systèmes (2), (3) et (4) suivants:

$$(2)\ \begin{cases}\alpha^2 = -(2\lambda+1),\\ \beta^2 = \gamma^2 = 1,\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases}\beta^2 = -(2\lambda+1),\\ \gamma^2 = \alpha^2 = 1,\end{cases}\qquad (4)\ \begin{cases}\gamma^2 = -(2\lambda+1),\\ \alpha^2 = \beta^2 = 1.\end{cases}$$

Montrer que pour $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ces tangentes doubles sont toutes ordinaires. Étudier le cas $\lambda = \frac{3}{2}$.

d) Utiliser les résultats précédents pour représenter relativement à un système d'axes rectangulaires $x'Ox, y'Oy$ (unité: 2 cm) la courbe d'équation $x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$; tracer ses tangentes doubles.

5° Il résulte du paragraphe I, 4° que l'on a $\mathcal{H}(Q) \subset \mathcal{H}(C_\lambda)$.

a) Par chacun des neuf points suivants:

(5) $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(1, 1, 0)$; $(1, -1, 0)$; $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$; $(-1, 0, 1)$; $(0, -1, 1)$;

passent quatre tangentes doubles à (C_λ). Démontrer que pour $\lambda' = -\frac{3}{4}(1 + i\sqrt{7})$ et $\lambda'' = -\frac{3}{4}(1 - i\sqrt{7})$ il existe d'autres points par lesquels on peut mener quatre tangentes doubles à (C_λ) (on pourra en chercher sur la droite $X - Y = 0$).

b) On pourra admettre que, pour $\lambda \in \Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, les neuf points (5) sont les seuls par lesquels il passe quatre tangentes doubles à (C_λ). En déduire que l'on a alors $\mathcal{H}(C_\lambda) = \mathcal{H}(Q)$.

Prouver que, si λ et μ sont deux éléments distincts de $\Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, il n'existe pas d'homographie h appartenant à $PGL(2, \mathbf{C})$ telle que l'on ait

$$h(C_\lambda) = (C_\mu).$$

6° Examiner ce que devient l'ensemble des tangentes doubles pour (C_∞) et montrer que l'on a encore

$$\mathcal{H}(C_\infty) = \mathcal{H}(Q).$$

N.B. — On ne cherchera pas à étudier les groupes $\mathcal{H}(C_{\lambda'})$ et $\mathcal{H}(C_{\lambda''})$.

Analyse.

N.B. — Les différentes parties du problème sont indépendantes dans une large mesure.

On désigne par (P) le *demi-plan de Poincaré*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, et par (D) le *disque unité*, ensemble des nombres complexes de valeur absolue (ou module) strictement inférieure à 1.

Les fonctions considérées sont à valeurs complexes.

I. — Le but de la première partie est de rechercher les représentations conformes de (P) sur lui-même.

1° *Transformation de Cayley.* — Démontrer que les conditions $\operatorname{Im}(z) > 0$ et $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ sont équivalentes. En déduire que l'application $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ définit une représentation conforme de (P) sur (D); déterminer l'application réciproque.

2° Quelles sont les transformations homographiques $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ qui conservent globalement (P)? Quel est l'ensemble des images d'un point donné de (P) par ces transformations?

En déduire, à l'aide de la question 1°, les transformations homographiques qui conservent globalement (D).

3° Déterminer les transformations conformes du disque (D) sur lui-même qui laissent fixe l'origine (on pourra utiliser le lemme de Schwarz sur les fonctions holomorphes dans un disque).

4° Montrer qu'il n'y a pas d'autres représentations conformes de (D) sur lui-même ou de (P) sur lui-même que les transformations homographiques déterminées à la question 2°.

Démontrer que les translations réelles $z \longmapsto z + \xi$ (ξ réel), les homothéties $z \longmapsto \eta z$ ($\eta > 0$) et la transformation $z \longmapsto \frac{-1}{z}$ engendrent le groupe des représentations conformes de (P) sur lui-même.

II. — On désigne par G le groupe des matrices carrées réelles d'ordre 2 dont le déterminant vaut 1 (groupe hyperbolique); on le fait opérer sur (P) par $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$, où g est l'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G et z un élément quelconque de (P).

Soit $p \in \mathbf{Z}$ un entier relatif fixé dans la suite de l'étude.

Pour toute fonction, φ, à valeurs complexes définie dans (P) et pour tout élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G, on désigne par φ_g la fonction

$$z \longmapsto \varphi_g(z) = [\operatorname{Am}(cz+d)]^{-p}\varphi(g.z),$$

en posant pour tout complexe z non nul $\operatorname{Am} z = \frac{z}{|z|}$.

1° Démontrer que, quels que soient les éléments g et g' de G et la fonction φ, on a

$$(\varphi_g)_{g'} = \varphi_{gg'}.$$

2° Si φ est une fonction deux fois continûment différentiable *au sens réel* [c'est-à-dire par rapport à $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$] dans (P), on définit l'opérateur Ω par $\Omega\varphi = y^2\Delta\varphi - ipy\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien. Démontrer que pour tout $g \in G$ on a $\Omega(\varphi_g) = (\Omega\varphi)_g$ (on démontrera qu'il suffit de vérifier cette relation pour une famille de générateurs de G; on achèvera la démonstration en utilisant les générateurs mis en évidence dans la question I, 4° ainsi éventuellement qu'une expression de Ω à l'aide de $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

3° Démontrer que, si φ est une fonction propre de Ω, c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe λ tel que

$$\Omega\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi(z) \not\equiv 0, \tag{1}$$

alors, pour tout élément g de G, φ_g est encore fonction propre de Ω avec la même valeur propre λ.

Déterminer, s étant un complexe fixé, les fonctions ω définies dans (P) qui vérifient

$$\omega(az+b) = a^s\omega(z),$$

quels que soient les nombres réels a et b avec $a > 0$ et $z \in (P)$ ($a^s = e^{s \operatorname{Log} a}$, avec $\operatorname{Log} a \in \mathbf{R}$). Démontrer que pour tout complexe λ on peut trouver s de manière que ces fonctions ω vérifient l'équation (1).

III. — Le but du problème est l'étude des fonctions propres φ de l'opérateur Ω qui vérifient en plus, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $z \in (P)$, l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z+\xi) = e^{i\mu\xi}\varphi(z), \quad \text{où } \mu \text{ est un réel donné.} \tag{2}$$

1° A une fonction φ vérifiant (2) on associe la fonction $f : y \longmapsto \varphi(iy)$ définie pour $y > 0$; inversement φ est déterminée par f. Montrer que, pour que φ vérifie l'équation (1), il faut et suffit que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on explicitera. Résoudre cette équation dans le cas particulier $\mu = 0$.

2° Dans le cas $\mu \neq 0$ on pose $\gamma(u) = f\left(\frac{u}{\mu}\right) = \varphi\left(\frac{iu}{\mu}\right)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par γ et montrer qu'elle se ramène par un changement de variable adéquat à l'équation de Whittaker :

$$\zeta^2 W''(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2}{4} - k\zeta + m^2 - \frac{1}{4}\right) W(\zeta),$$ avec des valeurs de m et k que l'on calculera en fonction de p et λ.

Démontrer que, pour $p = 0$, $h(u) = u^{-\frac{1}{2}}\gamma(u)$ vérifie l'équation de Bessel modifiée

$$u^2 h'' + uh' - (u^2 + n^2)h = 0.$$

(On précisera la valeur de n.)

1° Pour $z \in (P)$, on pose

$$\omega(z) = y^s = e^{s \operatorname{Log} y} \quad (\operatorname{Log} y \text{ étant réel}), \qquad \psi(z;\, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_g(z + \xi) e^{-i\mu\xi}\, d\xi, \quad g \in G, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

Soit $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que, pour s convenablement choisi, l'intégrale définissant $\psi(z;\, g_0)$ converge dans (P). Montrer que $\psi(z;\, g_0)$ est fonction propre de Ω et satisfait (2).

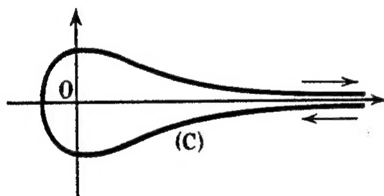
Écrire explicitement l'intégrale donnant $f_0(y) = \psi(iy;\, g_0)$.

2° Montrer que, si g est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $c \neq 0$, alors $\psi(z;\, g)$ est proportionnel à $\psi(z;\, g_0)$. Calculer le facteur de proportionnalité [on utilisera la décomposition $g = \sigma g_0 \tau \varepsilon$, ε désignant l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τ et σ étant deux éléments de G associés respectivement à une translation et à une similitude conservant (P)].

3° Montrer que, dans le cas $\mu = 0$, $f_0(y)$ est de la forme Ay^{1-s}, où A est une intégrale fonction de s et de p que l'on pourra calculer en se ramenant à une intégrale eulérienne :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1 + t)^{-(\alpha+\beta)}\, dt.$$

[On pourra faire le changement de variable d'intégration $\theta = -\frac{\xi + iy}{iy}$, et, en notant que dans l'intégrale obtenue on a $|\theta|^2 = -\theta(\theta + 2)$, transformer le contour d'intégration d'abord en un contour de Hankel (cf. figure), puis en $]0, +\infty[$ par un passage à la limite valable moyennant certaines restrictions sur s.]



4° Dans le cas général $\mu \neq 0$, expliciter l'intégrale donnant $\mu_0(u) = f_0\left(\frac{u}{\mu}\right)$. Le changement de variable $v = i\mu\xi - u$ permet de transformer cette intégrale en une intégrale sur un contour, (C), de Hankel, comme à la question précédente. On indiquera des conditions suffisantes pour que cette transformation soit applicable et les valeurs de s pour lesquelles la nouvelle intégrale converge.

En déduire l'expression de f_0 à l'aide de la fonction de Whittaker :

$$(3) \qquad W_{k,m}(z) = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma\left(k - m + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{(C)} (-v)^{m-k-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{v}{z}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} e^{-v}\, dv.$$

Pour $p = 0$, on obtient sous forme intégrale une solution de l'équation de Bessel modifiée.

5° Démontrer que, moyennant une hypothèse convenable sur s, on peut transformer l'intégrale précédente en une intégrale sur $]0, +\infty[$ comme à la question IV, 3°. Expliciter l'intégrale transformée (on rappelle l'égalité $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$).

6° Démontrer que, en prenant une détermination convenable de $(1 + x)^{-\alpha}$, qui sera précisée, et α non entier négatif, on a

$$(1 + x)^{-\alpha} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Delta)} \frac{\Gamma(-u + \alpha)\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha)} x^{-u}\, du,$$

pour $|\arg x| < \pi$ et pour un contour convenable (Δ) allant de $-\infty i$ à $+\infty i$ (on pourra utiliser un calcul de résidus ou la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier, et la formule asymptotique suivante :

$$\Gamma(z+a) \sim \sqrt{2\pi}\exp\left[\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} z - z\right], \quad \text{pour} \quad |z| \to \infty, |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \quad \text{avec} \quad \delta > 0).$$

7° Démontrer, à l'aide de la question précédente, que

$$(4) \qquad W_{k,-s+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2i\pi} e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{(\Delta)} \frac{\Gamma(s-k-u)\Gamma(1-s-k-u)\Gamma(u)}{\Gamma(s-k)\Gamma(1-s-k)} z^u \, du,$$

pour $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$, si $s-k$ et $1-s-k$ ne sont ni l'un ni l'autre des entiers négatifs. En déduire que

$$W_{k,-s+\frac{1}{2}} = W_{k,s-\frac{1}{2}}.$$

8° Démontrer à l'aide de la formule (3) ou de la formule (4) que $W_{k,m}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$e^{-\frac{z}{2}} z^k \left(1 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + r_n\right), \quad \text{où } r_n \text{ est dominé par } \frac{1}{|z|^{n+1}} \text{ lorsque } |z| \to \infty, \ |\arg z| < \frac{3\pi}{2}.$$

9° Démontrer que les fonctions $z \longmapsto W_{k,m}(z)$ et $z \longmapsto W_{-k,m}(-z)$ sont des solutions indépendantes de l'équation de Whittaker. En déduire la solution générale du système des deux équations (1) et (2), ainsi que les solutions de ce système qui sont dominées par une puissance de y lorsque $t \to +\infty$.